Didattica della matematica

Stefania Pozio

Contratto didattico

- L'insieme dei comportamenti dell'insegnante che sono attesi dall'allievo e l'insieme dei comportamenti dell'allievo che sono attesi dall'insegnante. (Brousseau, 1986)
- Ignorare la questione significa mettersi nelle condizioni di non voler capire quel che accade attorno a noi nelle ore di matematica.
- Permette di interpretare vari fenomeni che riguardano le prestazioni matematiche degli allievi e, più in generale, l'apprendimento – insegnamento della matematica. Ad esempio:

Contratto didattico

- Il comportamento degli allievi nei problemi del tipo “età del capitano” (“Su una imbarcazione viaggiano il capitano, due marinai e ventitre pecore; quale è l’età del capitano?” — risposta: 46 anni)
  - Gli studenti, di fronte all’enunciato di un problema, non sono abituati a mettere in discussione la validità delle domande dell’insegnante perché ripongono fiducia in lui e di conseguenza sono portati a pensare che ogni problema ha una sua soluzione che si può ricavare proprio utilizzando i dati del problema stesso.

Contratto didattico

- Il tentativo disperato, nella risoluzione di un problema, di ricordare degli schemi risolutivi quando si tratterebbe invece di ragionare ex novo.
- Il tentativo (assai meno frequente del precedente) di costruire un ragionamento risolutivo originale laddove basterebbe applicare una formula opportuna.

Un po' di terminologia

- Noetica: acquisizione concettuale, apprendimento dei concetti.
- Semiotica: rappresentazione dei concetti mediante sistema di segni.
- **Non c'è noetica senza semiotica**
- La semiotica è considerata una caratteristica necessaria per garantire il primo passo verso la noetica.

Apprendimento matematico

- L'apprendimento matematico consta di 4 elementi fondamentali, distinti ma tra loro interconnessi:
  - apprendimento dei concetti (noetica) preliminare a qualsiasi altro;
  - apprendimento di algoritmi (richiede capacità meccaniche e mnemoniche);
  - apprendimento "strategico" (capacità di argomentare, di risolvere problemi, di dimostrare);
  - apprendimento comunicativo (capacità di esprimere il proprio parere su cose matematiche, di descrivere un oggetto …..)

- **Il primo apprendimento matematico è la noetica. Dobbiamo insegnare ad apprendere concetti matematici.**

Semiotica

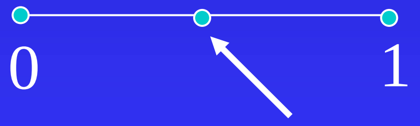
- I concetti della Matematica non esistono nella realtà concreta (il punto P, il numero 3, l'addizione….) per cui è necessario rappresentarli attraverso un *registro semiotico*.
- In Matematica non si impara a maneggiare i concetti, ma le loro *rappresentazioni semiotiche*.
- Per una *rappresentazione semiotica* vi sono più registri possibili.

Rappresentazioni semiotiche

- Una retta può essere rappresentata:
  - Registro semiotico: la lingua comune: RETTA
  - Registro semiotico: disegno
  - Registro semiotico: linguaggio algebrico $y = px + q$

Rappresentazioni semiotiche

- Il concetto di dividere a metà un intero:
  - Registro semiotico: la lingua comune
    - Rappresentazione semiotica: *un mezzo*
    - Rappresentazione semiotica: *la metà*
  - Registro semiotico: linguaggio figurale
    - Rappresentazione semiotica:



Rappresentazioni semiotiche

- Il concetto di dividere a metà un intero:
  - Registro semiotico: linguaggio aritmetico
    - Rappresentazione semiotica: ½ (scrittura frazionaria)
    - Rappresentazione semiotica: 0,5 (scrittura decimale)
    - Rappresentazione semiotica: $5x10^{-1}$ (scrittura esponenziale)

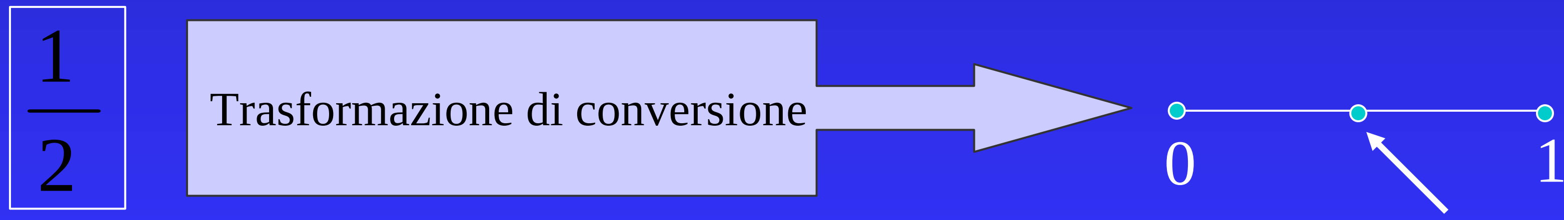
Rappresentazioni semiotiche

- Il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un'altra dello stesso registro semiotico si chiama "*trasformazione di trattamento*"

$$\boxed{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{Trasformazione di trattamento}} \boxed{0,5}$$

Rappresentazioni semiotiche

- Il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un'altra in un altro registro semiotico si chiama "*trasformazione di conversione*"



Dalla semiotica alla noetica

- L’insegnante (che conosce il concetto) propone allo studente (che non conosce ancora il concetto) alcune delle sue rappresentazioni semiotiche.
- Attraverso le rappresentazioni semiotiche lo studente <u>dovrebbe</u> costruire l’apprendimento concettuale di quel concetto.
- Se lo studente conoscesse già il concetto, potrebbe riconoscere in quelle rappresentazioni semiotiche il concetto; ma non conoscendo il concetto, vede solo delle rappresentazioni, cioè oggetti concreti.
- L’insegnante si illude che, vedendo lo studente manipolare quelle rappresentazioni semiotiche, egli stia di fatto manipolando il concetto.

Dalla semiotica alla noetica

- ATTENZIONE: lo studente potrebbe aver imparato solo a manipolare le rappresentazioni semiotiche senza aver costruito il concetto.
- Non ci sono ricette miracolistiche, c’è solo la consapevolezza.
- E’ necessario porre attenzione agli apprendimenti degli studenti, verificando se appartengono davvero alla sfera della noetica e non solo alla semiotica.

Dalla semiotica alla noetica

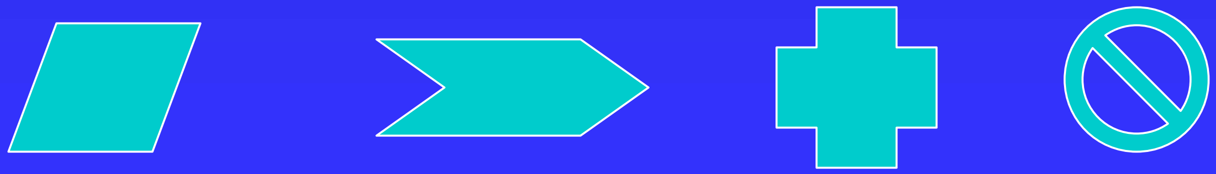
- La costruzione dei concetti matematici è strettamente dipendente dalla capacità di saper usare *più* registri di rappresentazioni semiotiche di quei concetti:
  - di scegliere i tratti distintivi del concetto da rappresentare e *rappresentarli* in un dato registro;
  - di *trattare* tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro;
  - di *convertire* tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro.

Dalla semiotica alla noetica

- Non si impara *automaticamente* a gestire i diversi registri, a scegliere i tratti distintivi del concetto da trattare, a convertire.
- Questo apprendimento deve essere il risultato di un insegnamento esplicito nel quale l'insegnante chiama ad essere corresponsabile lo studente.
- L'apparente semplicità di certi registri non deve far credere che lo studente se ne appropri e ne sia già padrone.

Esempi con le frazioni

- Quando si vogliono trovare frazioni in contesti continui si tende a privilegiare l'uso di figure standard: rettangoli, cerchi, quadrati.
- E' assolutamente necessario creare situazioni nelle quali si debbano trovare frazioni di figure non standard. Es.: trovare i ¾ delle seguenti figure:

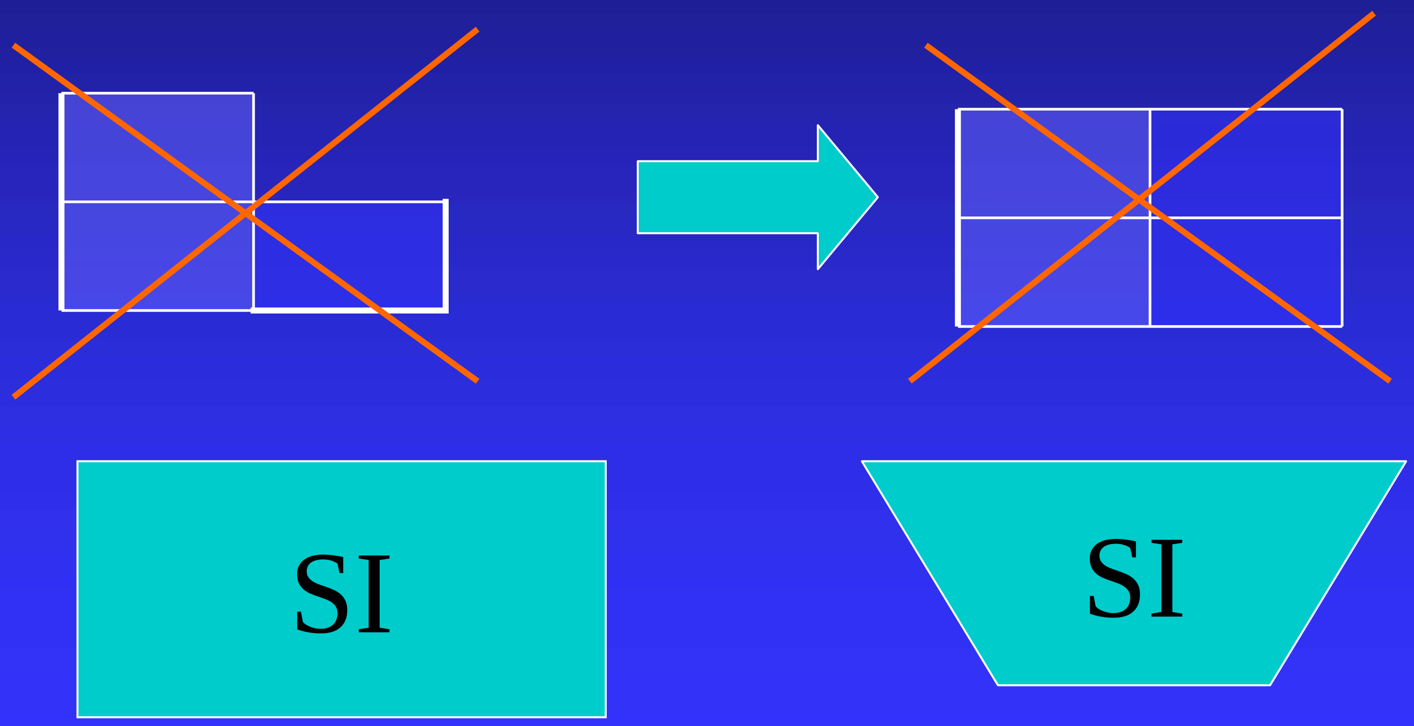


Esempi con le frazioni

- Di solito, negli esercizi di routine, si dà una figura e se ne cerca una frazione.
- E’ necessario creare situazioni inverse: “Ecco i ¾ di un’unità. Trova l’unità di partenza”.
- E’ fondamentale costruire l’idea che non sempre c’è un’unica risposta corretta. (Attenzione al *contratto didattico*!)
- E’ fondamentale dare esercizi in cui la parte frazionaria abbia l’aspetto di una figura compatta, perché, in questo modo, lo studente, per risolvere l’esercizio, deve rompere il modello mentale che si sta costruendo.

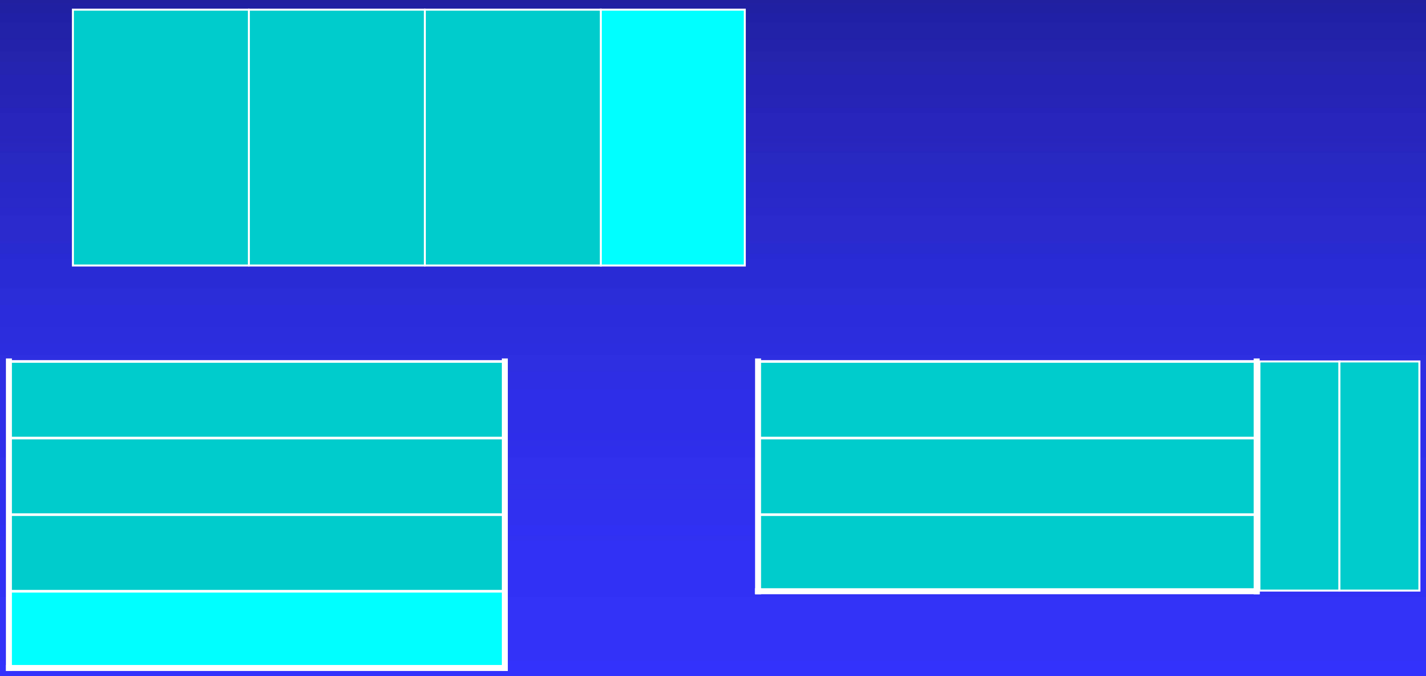
Esempi con le frazioni

- "Ecco i ¾ di un'unità. Trova l'unità di partenza".



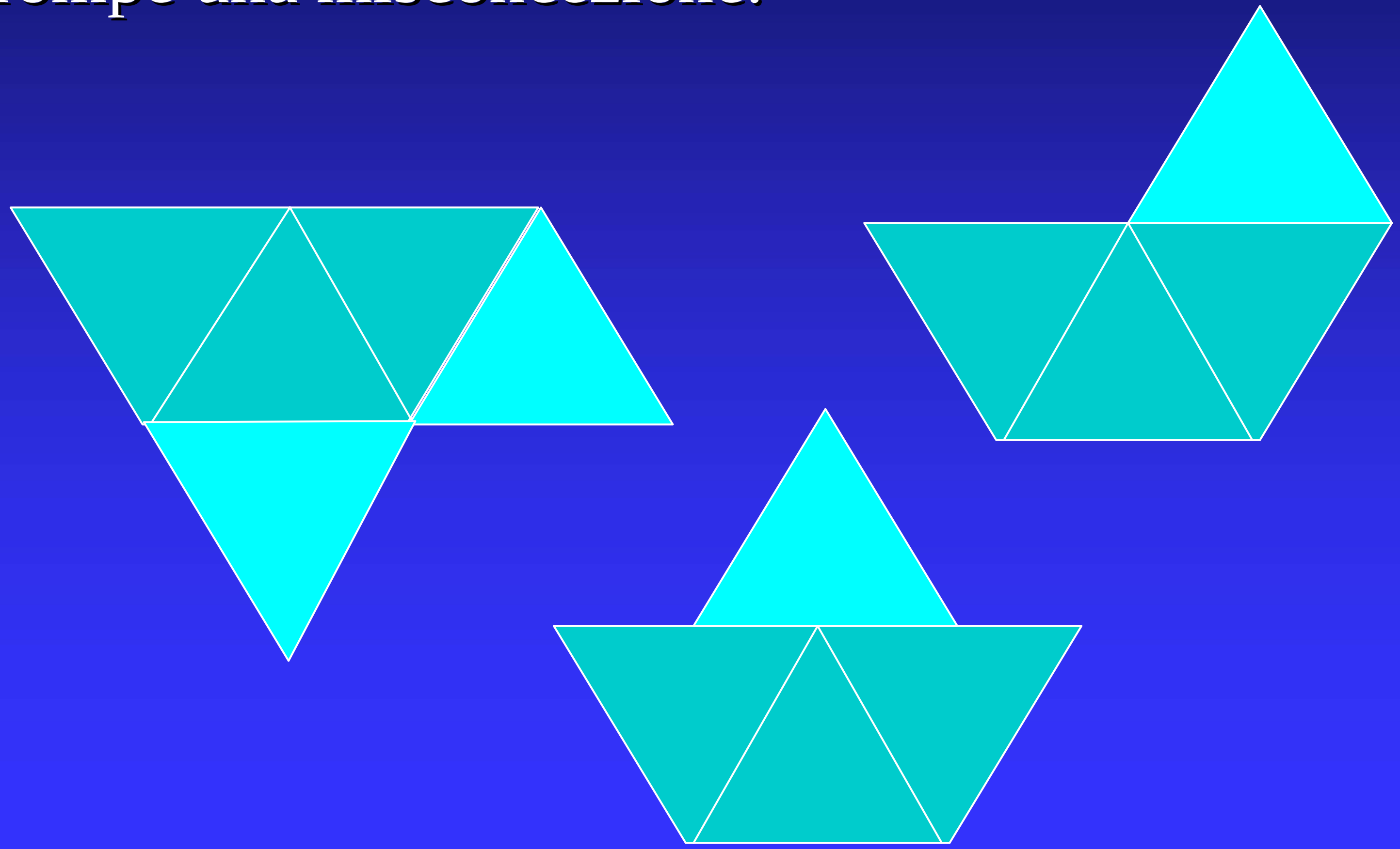
Esempi con le frazioni

- Lo studente può dividere il rettangolo (il trapezio) in 3 parti a piacere: questa scelta lo potrà portare a soluzioni diverse, tutte potenzialmente giuste.



Esempi con le frazioni

- Lo studente deve dividere il rettangolo (il trapezio) in tante parti quante ne esprime il numeratore, il che rompe una misconcezione.



Misconceptions

- Sono intuizioni scorrette, fraintendimenti, concezioni errate che coesistono nella mente dello studente insieme alla conoscenza formale che ha acquisito in un secondo momento.
- Quando uno studente commette un errore, non necessariamente vuol dire che manca di conoscenza rispetto a quel determinato argomento. Questo errore può derivare proprio da *misconceptions*.
- Poiché il primo vero contatto che un individuo ha con la matematica avviene a scuola, è proprio in questo ambito che si cominciano a creare le prime *misconceptions* derivanti da un’errata interpretazione dei messaggi dell’insegnante.
- Permettono di interpretare gli errori degli studenti che, a loro volta, denotano comportamenti fallimentari.

Il caso della sottrazione

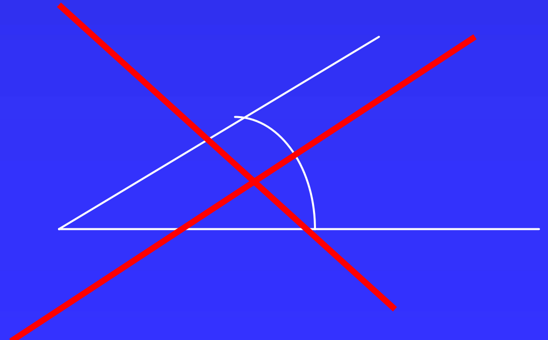
- Spesso nella sottrazione molti bambini sbagliano perché applicano in modo del tutto corretto degli algoritmi che sono assolutamente scorretti e non viceversa, cioè perché applicano in modo errato degli algoritmi corretti.
- Esempio (Brown e Burton, 1978): Una bambina di nome Johnnie sottrae 284 da 437 ottenendo 253:

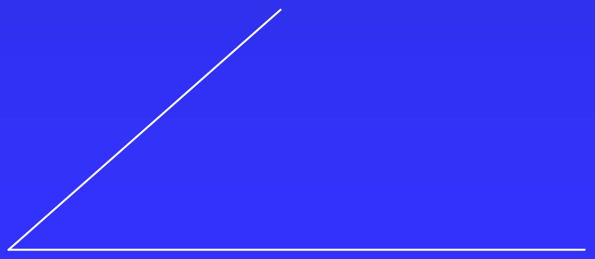
$$\begin{array}{r} 437\ - \\ 284\ = \\ \hline 253 \end{array}$$

La maestra, vedendo questo risultato, pensa che l'allieva abbia soltanto dimenticato di sottrarre 1 da 4 nella colonna delle centinaia, e glielo fa notare, ma l'alunna non capisce in quanto il suo algoritmo consisteva nel sottrarre la cifra più bassa dalla cifra più alta nella stessa colonna. Quindi il suggerimento che la maestra dà a Johnnie non la aiuta, ma, anzi, la confonde ancora di più perché lei non sta sullo stesso percorso risolutivo della maestra, ma su un percorso alternativo.

Misconceptions

- Inevitabili: dipende dalla necessaria gradualità dell'introduzione di saperi che, per essere proposti, si devono ancorare a rappresentazioni semiotiche che spesso nascondono la totalità o la complessità di un concetto (Rettangolo e quadrato)
- Evitabili: rappresentazione grafica degli angoli.





Immagini mentali e modelli

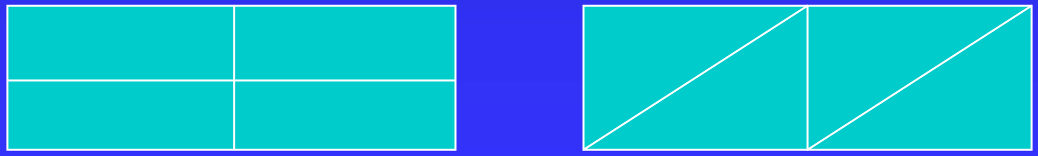
- Immagine mentale è il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione di un concetto.
  - E' condizionata da influenze culturali, stili personali.
  - E' un prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi.
- Farsi un modello di un concetto significa rielaborare successive immagini (deboli, instabili) per giungere ad una di esse definitiva (forte, stabile).
- Si definisce modello intuitivo quello che risponde pienamente alle sollecitazioni intuitive e che ha quindi un'accettazione immediata forte.

Esempi di modelli intuitivi

- “La moltiplicazione aumenta i valori” (è vero in N, ma non in Q).
  - Se si chiede a studenti evoluti: quale di queste operazioni dà un risultato maggiore: 18 x 0,25 oppure 18 : 0,25, la maggior parte risponde in modo errato.
- Nella sottrazione si privilegia solo l’immagine del togliere:
  - Se togliamo 3 palline da un insieme di 10 palline, quante palline rimarranno? (100% risposte corrette)
  - Ho tre palline, ma me ne occorrono 10 per giocare. Quante palline devo aggiungere a quelle che ho già per poter cominciare a giocare? (Poche risposte corrette)
- Nella divisione si tende a dividere sempre il numero più grande per quello più piccolo.
  - 5 kg di biscotti devono essere divisi tra 15 bambini. Che peso di biscotti riceverà ciascun bambino?

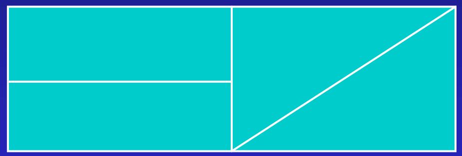
Immagini mentali e modelli

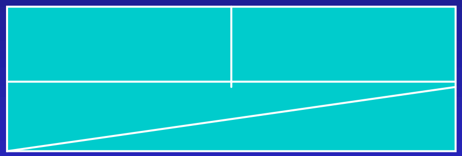
- L’idea di semplificare ad ogni costo, a volte, si rivela una strategia didattica non ottimale: l’immagine concettuale che il bambino si fa della nuova proposta cognitiva si trasforma troppo presto in modello e nascono ostacoli didattici alla costruzione della conoscenza.
- Esempio: si propone al bambino di dividere un rettangolo in 4 parti uguali.



Immagini mentali e modelli

- Ma allora la seguente divisione del rettangolo in 4 parti uguali:





E' corretta oppure no?

I processi metacognitivi

- Riguardano:
  - una conoscenza consapevole, da parte dello studente, di se stesso come soggetto che apprende, delle risorse che ha a disposizione e della struttura della conoscenza negli ambiti in cui lavora.
  - l’autoregolazione, il monitoraggio e l’organizzazione delle proprie abilità cognitive, cioè quanto si è in grado di tenere traccia di quello che si sta facendo mentre, ad esempio, si sta risolvendo un problema e quanto si usano i risultati di queste osservazioni per guidare le azioni che si stanno compiendo durante la risoluzione di un problema.
- Varie ricerche mettono in luce un rapporto tra livello metacognitivo generale, specifico per la matematica e successo nella disciplina.

L’importanza dei processi metacognitivi

- E’ necessario adottare una didattica in cui l’attenzione ai contenuti è affiancata dall’«attenzione al metodo» della conoscenza;
- È necessario garantire tale «attenzione al metodo» portando gli alunni ad un uso via via più consapevole delle proprie conoscenze, anche in termini di intervento e di controllo sull’esecuzione di un compito.
- Un soggetto più sensibilizzato dal punto di vista metacognitivo è avvantaggiato sul lato pratico perché è capace di servirsi di questa capacità di autoriflessione per organizzare e dirigere al meglio il proprio apprendimento.

Aree didattiche

- Riconoscere abilità cognitive implicate in situazioni matematiche e le loro interconnessioni.
- Riconoscere il proprio stile tendenziale e le strategie cognitive.
- Avere un atteggiamento positivo verso la matematica.
- Saper riconoscere e gestire situazioni di ansia in matematica
- Riconoscere l'importanza della comprensione del testo per la soluzione di compiti matematici.
- Saper prevedere le difficoltà di un compito e le proprie possibilità di riuscita.
- Saper pianificare le procedure per una soluzione ottimale di un compito.
- Saper monitorare la propria prestazione.
- Fornire una valutazione finale della propria prestazione.

Riconoscere abilità cognitive implicate in situazioni matematiche e le loro interconnessioni

- Riconoscere il ruolo dell'attenzione in matematica
- Riconoscere l'importanza dell' autoefficacia nella matematica
- Riconoscere il ruolo della memoria di lavoro a breve termine in situazioni matematiche.

Riconoscere l’importanza dell’ autoefficacia nella matematica

Verifica in classe. Mario si guarda intorno e vede tutti i compagni che lavorano. Mario pensa di non essere capace e cerca un possibile suggerimento. Poi però cambia idea. “E’ proprio vero che non sono capace?” si chiede.

Discuti con i compagni e l’insegnante.

1. Ti sei mai trovato in una situazione simile? Racconta la tua esperienza.
2. Quando hai trovato la soluzione o l’insegnante l’ha spiegata, cosa hai pensato?
3. Era proprio vero che non saresti stato in grado di risolvere quel compito?

Avere un atteggiamento positivo verso la matematica.

- Riconoscere, in maniera positiva, la possibilità di insuccesso e utilizzare l’errore.
- Riconoscere cause tipiche di errore.
- Riconoscere il ruolo dell’impegno personale.
- Sviluppare motivazioni intrinseche.

Riconoscere cause tipiche di errore.

Rifletti e completa la tabella. Scrivi a fianco di ciascun errore un suggerimento che daresti a un tuo compagno per farglielo evitare.

Eventuali errori	Cosa fare
Errori di calcolo	
Errori di distrazione	
Errori di comprensione del testo	
Errori di procedimento	
Errori perché non si hanno chiari alcuni argomenti	

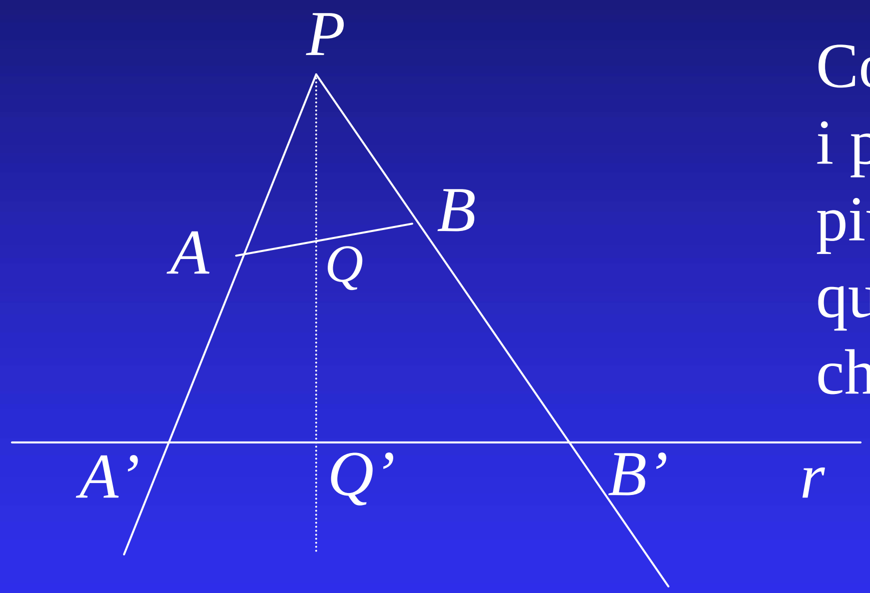
Alcuni suggerimenti

- Cambiamento dei ruoli:
  - Il ruolo dell'insegnante: da depositario / trasmettitore di conoscenze e responsabile unico dell'apprendimento di tutti a *ideatore, stimolatore, organizzatore* di attività che permettono agli allievi di costruirsi responsabilmente la propria conoscenza.
  - Il ruolo dell'allievo: da passivo ascoltatore, diligente imitatore, fedele riproduttore a *attivo, responsabile, interessato e cosciente* nei confronti del proprio apprendimento.

Alcuni suggerimenti

- Far discutere i ragazzi di matematica.
- Partire dal concreto e presentare solo quegli argomenti di cui sono ben visibili le origini concrete.
- Questioni che si possono prospettare (12 anni):
  - Qual è il punto di mezzo tra 0 e 1? E fra 0 e ½? E fra 0 e ¼?
  - Sono più i numeri pari o tutti i numeri interi?

Se dal punto P proietto i punti del segmento AB sulla retta *r* accade che il segmento AB corrisponderà al segmento A'B' su *r* e che da un punto qualunque Q di AB corrisponderà un punto Q' di A'B'.



Come è possibile che i punti di AB, che è più piccolo siano tanti quanti i punti di A'B' che è più grande?

Questioni così profonde appassionano i bambini e operano una maturazione intellettuale che accelera quel passaggio dal concreto all'astratto che è tipico della preadolescenza.

Alcuni suggerimenti

- Prima di introdurre un concetto, far parlare i bambini sulle idee che hanno di questo concetto.
- Nella discussione l'insegnante deve partecipare più per ascoltare che per intervenire, più per mettere ordine che per indirizzare.
- Quanto più tempo gli studenti avranno dato allo studio del concreto, all'osservare, tanto meglio passeranno alla comprensione delle forme astratte.

Necessità di ricorso al concreto

- Il disegno non suggerisce dei problemi perché offre un numero finito di casi e vincola così la libertà di pensiero del bambino.
- Non conduce all'osservazione per il fatto che è statico.
- Non può fornire un'immagine reale di una situazione spaziale.
- Nel disegnare, il bambino si ferma sul tratto disegnato, sul contorno e non sull'interno.

Alcuni suggerimenti (aritmetica)

- Dedicare un po’ più di tempo al calcolo mentale.
- Abituare i ragazzi a giudicare a occhio il valore del risultato (importantissimo anche per l’uso delle calcolatrici).
- Evitare di dare tanto rilievo alle espressioni numeriche in quanto di riducono a un meccanico tecnicismo.